# Richiami di algebra e matematica elementare

## Operazioni Algebriche

Dati due numeri reali (a) e (b) è possibile eseguire con essi tutte le operazioni algebriche con l'avvertenza che il prodotto (o il rapporto) tra due numeri con lo stesso segno dà come risultato sempre un numero positivo, mentre da' come risultato sempre un numero con segno negativo se i due numeri hanno segno diverso.

Il valore assoluto di un numero reale |a| è lo stesso numero assunto sempre con segno positivo.

Il rapporto tra due numeri reali costituisce un rapporto numerico (a/b).

L'uguaglianza di due rapporti è detta proporzione

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

che si può anche scrivere

$$a : b = c : d$$

dove:

(a) e (c) sono detti antecedenti;

(b) e (d) sono detti conseguenti;

(b) e (c) sono detti medi;

(a) e (d) sono detto estremi;

## SOMMATORIA

- Molte volte per indicare in maniera più breve la somma di N numeri reali si usa la lettera greca sigma Σ nella seguente maniera

$$x_1 + x_2 + ..x_i + ..x_n = S = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

e si legge: somma di $x_i$ per i che varia da 1 a N.

La sommatoria gode di alcune proprietà. Le più importanti sono:

1) se i membri da sommare sono tutti uguali tra loro, essendo (a) il singolo membro ed (N) il numero dei membri, possiamo scrivere:

$$\Sigma\, a = Na$$

2) se una costante (a) moltiplica ogni membro della sommatoria possiamo scrivere:

$$ax_1 + ax_2 + ..ax_i + ..ax_n = a\, \Sigma x_i$$

3) se i membri di una sommatoria costituiscono una somma di membri, possiamo scrivere:

$$\Sigma\, (x_i + y_i) = \Sigma x_i + \Sigma y_i$$

4) se i membri di una sommatoria sono altrettante sommatorie, possiamo scrivere:

$$\Sigma x_1 + \Sigma x_2 + \Sigma x_3 + ... = \Sigma\Sigma\, x_{ij}$$

## PRODUTTORIA

Se come operazione consideriamo la moltiplicazione una maniera più breve per indicare il prodotto di (N) numeri reali è la lettera greca π nel modo seguente:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ....x_i \cdot ....x_n = P = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

e si legge: prodotto di $x_i$ dove i assume tutti i valori che vanno da 1 a N.

## POTENZE

La potenza (n-esima) di un numero reale (a) è il prodotto di (n) fattori uguali ad (a). In simboli:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots\ldots \cdot a \text{ (n volte)}$$

È utile indicare che (n) ed (a) sono detti, rispettivamente, esponente e base della potenza.

Esempio:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Le proprietà della potenza sono:

1) il prodotto tra potenze aventi la stessa base è pari ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2) il rapporto tra potenze aventi la stessa base è pari ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza egli esponenti.

$$a^n / a^m = a^{n-m}$$

3) la potenza di una potenza è pari ad una potenza con esponente dato dal prodotto degli esponenti.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

4) la potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli termini con lo stesso esponente.

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

5) una potenza con esponente negativo è uguale al reciproco della potenza stessa.

$$1 / a^n = a^{-n}$$

6) qualunque numero elevato a zero è pari all'unità.

$$a^o = 1$$

## RADICI

La radice (n-esima) di un numero reale (b) è il numero (a) che elevato ad (n) permette di ottenere (b). In simboli:

$$\sqrt[n]{b} = a$$

in quanto si verifica che

$$a^n = b$$

È utile precisare che (n) è detto esponente o indice della radice, (b) il radicando ed (a) la radice.

La radice di un numero può essere espressa anche come una potenza con esponente frazionario:

$$\sqrt[n]{b^n} = b^{m/n}$$

e pertanto sono valide tutte le proprietà viste a proposito delle potenze.

## LOGARITMI

Il logaritmo di base (n), di un numero (b), è quel numero (a) a cui bisogna elevare (n) per avere (b). In simboli:

$$\log_n b = a$$

in quanto si verifica che:

$$n^a = b$$

Anche in questo caso appare utile precisare che (n) costituisce la base dei logaritmi; (b) l'argomento ed (a) il logaritmo. Per i calcoli numerici vengono quasi sempre utilizzati i logaritmi in base decimale (n = 10), mentre nell'analisi matematica vengono spesso usati i logaritmo naturali che hanno come base il numero neperiano (n = 2,718281828...). Quando non è indicata la base in genere si fa riferimento sempre ai logaritmi decimali (come nel nostro caso).

$$\mathrm{Log}_{10} 100 = 2$$

in quanto

$$10^2 = 100$$

I logaritmi godono di quattro proprietà fondamentali:

1) il logaritmo di un prodotto è uguale al prodotto dei logaritmi:

$$\text{Log}\,(a \cdot b) = \text{Log}\,a + \text{Log}\,b$$

2) il logaritmo di un quoziente è uguale alla differenza dei logaritmi:

$$\text{Log}\,(a / b) = \text{Log}\,a - \text{Log}\,b$$

3) il logaritmo di una potenza è uguale all'esponente che moltiplica il logaritmo della base:

$$\text{Log}\,a^n = n\,\text{Log}\,a$$

4) il logaritmo di una radice è uguale all'inverso dell'indice per il logaritmo del radicando:

$$\text{Log}\,\sqrt[n]{a} = 1/n\,\text{Log}\,a$$

La parte intera del logaritmo di un numero si chiama caratteristica e la parte decimale mantissa.

L'antilogaritmo costituisce l'operazione inversa del logaritmo (dato un logaritmo risalire al numero che lo ha generato). Il cologaritmo di un numero, invece, è l'opposto del logaritmo stesso:

$$\text{Colog}\,a = -\text{Log}\,a$$

## EQUAZIONI

L'equazione di primo grado è l'uguaglianza tra due quantità, che esiste solo per un valore incognito (x).

Esempio:

$$3\,x = 6$$

la quantità al primo membro viene ad essere uguale alla quantità presente al secondo membro, solo se il valore incognito assume il valore 2. Infatti

$$3 \cdot 2 = 6.$$

Aggiungendo, sottraendo, moltiplicando e dividendo, ambo i membri dell'equazione di primo grado, l'equazione non muta. Inoltre il passaggio di un termine da un membro all'altro determina il cambiamento del segno. In base a queste importanti osservazioni è possibile risolvere qualsiasi equazione di primo grado si presenti.

Esempio

$$5x - 1 = 2x$$

possiamo scrivere

$$5x - 2x = 1$$

cioè

$$3x = 1$$

dividendo ambo i membri per 3

$$x = 1/3 = \text{valore dell'incognita.}$$

Un'equazione di secondo grado è l'uguaglianza tra due quantità, che esiste per due valori dell'incognita (x). La forma con cui si presenta l'equazione è la seguente:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e la soluzione viene fornita dalla seguente formula:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Un sistema di primo grado è dato da due equazioni di primo grado.

Esempio:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Come si può notare ogni equazione contiene l'incognita (x) e l'incognita (y), ed è necessario pertanto trovare i valori delle due incognite che soddisfino "contemporaneamente" le due equazioni.

Vi sono vari metodi di risoluzione il più diffuso è quello della sostituzione, in base al quale da una equazione si ricava una incognita che deve essere sostituita nell'altra.

Nell'esempio fatto avremo:

$$x = \frac{2-y}{3}$$

$$\frac{2 \cdot (2-y)}{3} - y = 1$$

risolvendo si otterrà

$$y = 1/5$$

che sostituita in una delle equazioni originarie ci permetterà di trovare l'altra incognita (x) = 3/5.

## Funzioni Algebriche

Il variare della quantità (y) al variare della quantità (x) rappresenta la funzione

$$y = f\,(x)$$

La variabile (y) è detta variabile dipendente e la variabile (x) variabile indipendente.

Gli esempi di funzioni che si incontrano nel concreto sono numerosi. Lo spazio percorso da un veicolo in movimento è funzione del tempo: all'aumentare del tempo aumenta lo spazio percorso.

L'andamento grafico di una funzione si ottiene andando ad individuare, su un sistema di assi cartesiani, alcuni punti della funzione, in modo che uniti attraverso una linea, forniscono il grafico.

Ovviamente il valore che la variabile dipendente (y) assume per ogni valore assegnato arbitrariamente alla (x) varia al variare della "relazione" che lega le due variabili. Ad esempio una funzione del tipo: